

Лекция 4

Численные методы решения нелинейных уравнений

Вопросы лекции

1. Решение уравнений с одним неизвестным.
2. О решении алгебраических уравнений.
3. Решение систем нелинейных уравнений.

Вопрос 1.

**Решение уравнений с одним
неизвестным**

1. Вводные замечания. Задача нахождения корней нелинейных уравнений вида

$$F(x) = 0 \quad (5.1)$$

встречается в различных областях научных исследований (здесь $F(x)$ — некоторая непрерывная функция). Нелинейные уравнения можно разделить на два класса — алгебраические и трансцендентные. *Алгебраическими* уравнениями называются уравнения, содержащие только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные). В частности, многочлен является целой алгебраической функцией. Уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и др.), называются *трансцендентными*.

Методы решения нелинейных уравнений делятся на прямые и итерационные. *Прямые* методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения (формулы). Из школьного курса алгебры читателю известны такие методы для решения тригонометрических, логарифмических, показательных, а также простейших алгебраических уравнений.

Однако встречающиеся на практике уравнения не удается решить такими простыми методами. Для их решения используются *итерационные* методы, т. е. методы последовательных приближений. Как и в рассмотренном в гл. 4 случае систем линейных уравнений, алгоритм нахождения корня нелинейного уравнения с помощью итерационного метода состоит из двух этапов: а) отыскания приближенного значения корня (начального приближения); б) уточнения приближенного значения до некоторой заданной степени точности. В некоторых методах отыскивается не начальное приближение, а некоторый отрезок, содержащий корень.

Начальное приближение может быть найдено различными способами: из физических соображений, из решения аналогичной задачи при других исходных данных, с помощью графических методов. Если такие априорные оценки исходного приближения провести не удастся, то находят две близко расположенные точки a и b , в которых непрерывная функция $F(x)$ принимает значения разных знаков, т. е. $F(a)F(b) < 0$. В этом случае между точками a и b есть по крайней мере одна точка, в которой $F(x) = 0$. В качестве начального приближения x_0 можно принять середину отрезка $[a, b]$, т. е. $x_0 = (a + b)/2$.

Итерационный процесс состоит в последовательном уточнении начального приближения x_0 . Каждый такой *шаг* называется *итерацией*. В результате итераций находится последовательность приближенных значений корня $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$. Если эти значения с ростом k стремятся к истинному значению корня

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x,$$

то говорят, что итерационный процесс *сходится*.

Ниже рассматриваются некоторые итерационные методы решения трансцендентных уравнений. Они могут использоваться также и для нахождения корней алгебраических уравнений

Критерием окончания итерационного процесса можно считать выполнение одного из трех неравенств:

$$\left| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)} \right| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right)^2} < \varepsilon, \quad (4.21)$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| < \varepsilon, \quad (4.22)$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}}{x_i^{(k)}} \right| < \varepsilon, \quad \text{при } |x_i| \gg 1. \quad (4.23)$$

Здесь в первом случае отличие векторов $\mathbf{x}^{(k)}$ и $\mathbf{x}^{(k-1)}$ «на ε » понимается в смысле малости модуля их разности, во втором — в смысле малости разностей всех соответствующих компонент векторов, в третьем — в смысле малости относительных разностей компонент. Если система не является плохо обусловленной, то в качестве критерия окончания итерационного процесса можно использовать и условие малости невязки.

Невязка — ошибка (**погрешность**) вычислений.

Пусть требуется найти такое x , что значение функции:

$$f(x) = b.$$

Подставив приближенное значение x_0 вместо x , получается невязка

$$b - f(x_0)$$

а ошибка в этом случае равна

$$x_0 - x.$$

Если точное значение x неизвестно, вычисление ошибки невозможно, однако при этом может быть определена невязка.

2. Метод деления отрезка пополам (метод бисекции). Это один из простейших методов нахождения корней нелинейных уравнений. Он состоит в следующем. Допустим, что нам удалось найти отрезок $[a, b]$, на котором расположено искомое значение корня ²⁾ $x = c$, т. е. $c \in [a, b]$. В качестве начального приближения корня c_0 принимаем середину этого отрезка: $c_0 = (a + b)/2$. Далее исследуем значения функции $F(x)$ на концах отрезков $[a, c_0]$ и $[c_0, b]$, т. е. в точках a, c_0, b . Тот из отрезков, на концах которого $F(x)$ принимает значения разных знаков, содержит искомый корень; поэтому его принимаем в качестве нового отрезка $[a_1, b_1]$. Вторую половину отрезка $[a, b]$, на которой знак $F(x)$ не меняется, отбрасываем. В качестве первого приближения корня принимаем середину нового отрезка $c_1 = (a_1 + b_1)/2$ и т. д. Таким образом, k -е приближение вычисляется как

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}; \quad (5.2)$$

после каждой итерации отрезок, на котором расположен корень, уменьшается вдвое, а после k итераций он сокращается в 2^k раз:

$$b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}. \quad (5.3)$$

Пусть приближенное решение x_* требуется найти с точностью до некоторого заданного малого числа $\varepsilon > 0$:

$$|x - x_*| < \varepsilon. \quad (5.4)$$

Взяв в качестве приближенного решения k -е приближение корня: $x_* = c_k$, запишем (5.4) с учетом обозначения $x = c$ в виде

$$|c - c_k| < \varepsilon. \quad (5.5)$$

Как легко видеть, из (5.2) следует, что (5.5) выполнено, если

$$b_k - a_k < 2\varepsilon. \quad (5.6)$$

Таким образом, итерационный процесс нужно продолжать до тех пор, пока не будет выполнено условие (5.6).

Метод деления отрезка пополам проиллюстрирован на рис. 5.1. Пусть для определенности $F(a) < 0$, $F(b) > 0$. В качестве начального приближения корня примем $c_0 = (a + b)/2$. Поскольку в рассматриваемом случае $F(c_0) < 0$, то $c \in [c_0, b]$, и рассматриваем только отрезок $[c_0, b]$, т. е. $a_1 = c_0$, $b_1 = b$. Следующее приближение: $c_1 = (c_0 + b)/2$. При этом отрезок $[c_1, b]$ отбрасываем, поскольку $F(c_1) > 0$ и $F(b) > 0$. Таким образом, $c \in [c_0, c_1]$, $a_2 = c_0$, $b_2 = c_1$. Аналогично находим другие приближения: $c_2 = (c_0 + c_1)/2$ и т. д. до выполнения условия (5.6).

В отличие от большинства других итерационных методов метод деления отрезка пополам всегда сходится, причем можно гарантировать, что полученное решение будет иметь любую наперед заданную точность (разумеется, в рамках разрядности компьютера). При применении этого метода нет необходимости приближенно определять момент достижения требуемой точности, пользуясь, например, условиями близости двух последовательных приближений (4.22) или (4.23) (записанными для скалярного случая). Вместо них применяется соотношение (5.6), гарантирующее выполнение (5.4).

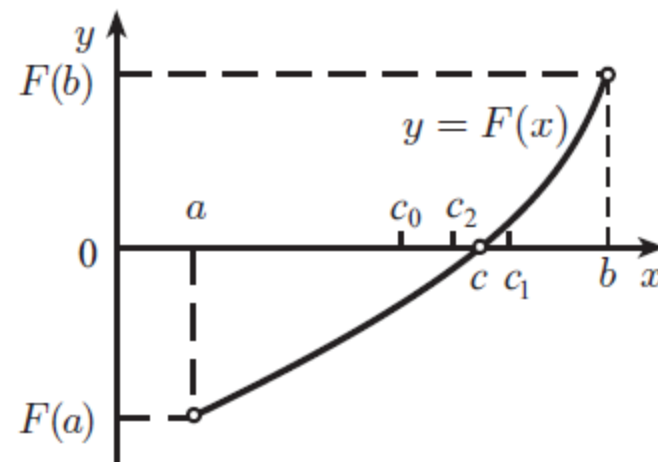


Рис. 5.1. Метод деления отрезка пополам

Однако метод деления отрезка пополам довольно медленный. Вычислим число итераций N , требуемое для достижения точности ε . Для этого выясним, пользуясь (5.3), для каких k выполнено условие (5.6), и возьмем в качестве N наименьшее из таких k . Окончательно получим

$$k > \log_2 \frac{b-a}{2\varepsilon}, \quad N = E\left(\log_2 \frac{b-a}{2\varepsilon}\right) + 1, \quad (5.7)$$

где $E(x)$ — целая часть числа x . Обычно для метода деления отрезка пополам N больше, чем для некоторых других методов, что не является препятствием к применению этого метода, если каждое вычисление значения функции $F(x)$ несложно.

Итерационный процесс можно завершать и тогда, когда значение функции $F(x)$ после k -й итерации станет меньшим по модулю ε , т. е.

$$|F(c_k)| < \varepsilon. \quad (5.8)$$

Такое условие окончания итераций аналогично условию (4.24). Действительно, для уравнения (5.1) величина $F(c_k)$ есть *невязка*, полученная на k -й итерации.

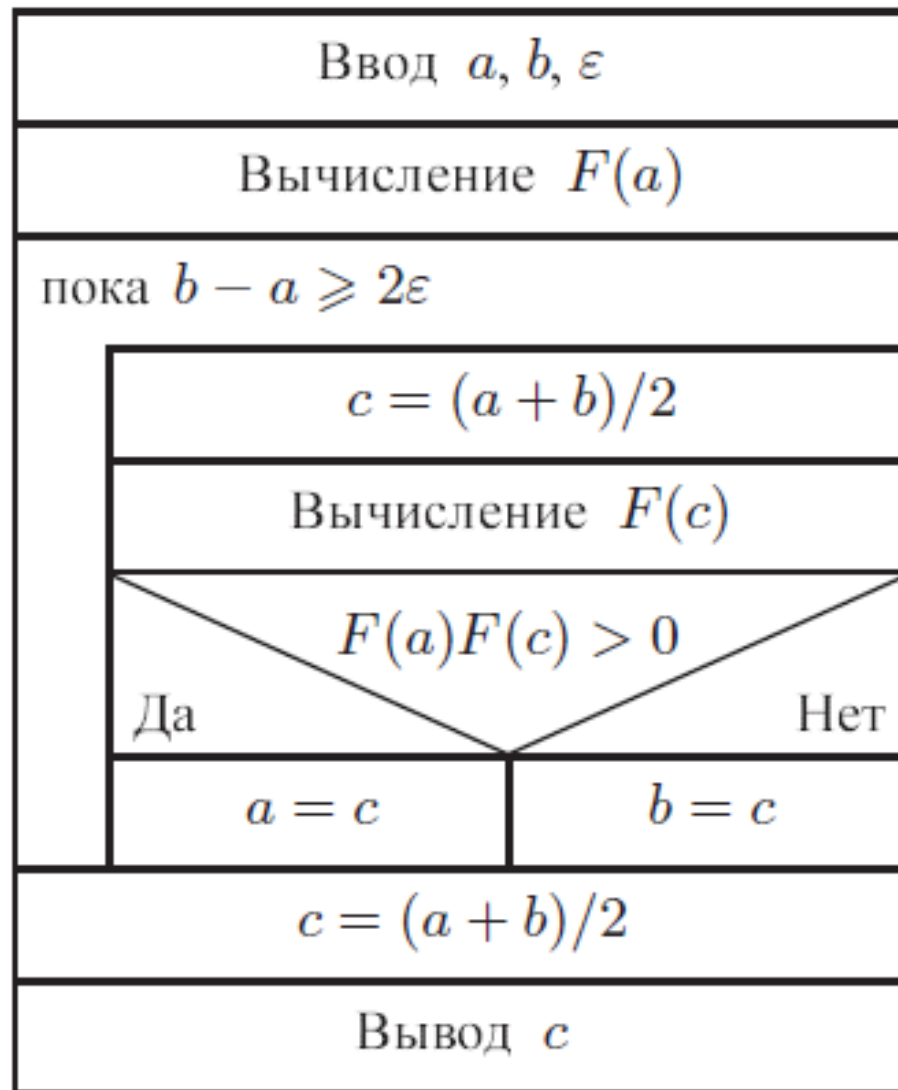


Рис. 5.2. Алгоритм метода деления отрезка пополам

3. Метод хорд. Пусть мы нашли отрезок $[a, b]$, на котором функция $F(x)$ меняет знак. Для определенности примем $F(a) > 0$, $F(b) < 0$ (рис. 5.3). В данном методе процесс итераций состоит в том, что в качестве приближений корню уравнения (5.1) принимаются значения c_0, c_1, \dots точек пересечения хорды с осью абсцисс.

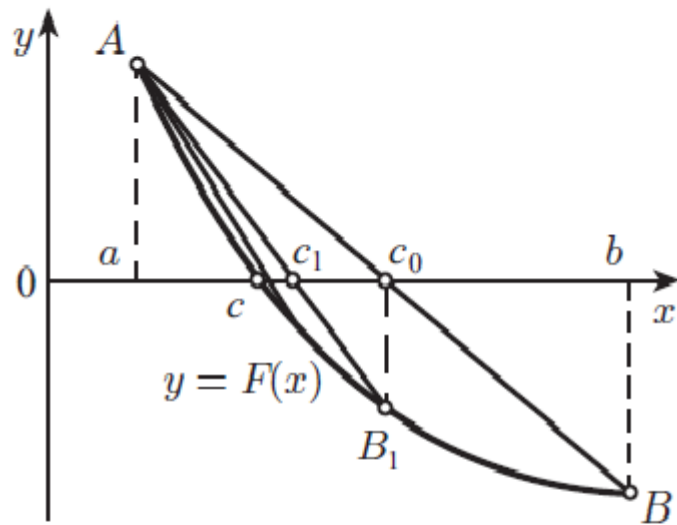


Рис. 5.3. Метод хорд

Сначала находим уравнение хорды AB :

$$\frac{y - F(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

Для точки пересечения ее с осью абсцисс ($x = c_0$, $y = 0$) получим уравнение

$$c_0 = a - \frac{b - a}{F(b) - F(a)} F(a). \quad (5.9)$$

Далее, сравнивая знаки величин $F(a)$ и $F(c_0)$ для рассматриваемого случая, приходим к выводу, что корень находится в интервале (a, c_0) , так как $F(a)F(c_0) < 0$. Отрезок $[c_0, b]$ отбрасываем. Следующая итерация состоит в определении нового приближения c_1 как точки пересечения хорды AB_1 с осью абсцисс и т. д.

В отличие от метода деления отрезка пополам в методе хорд условие окончания итераций типа (5.6) неприменимо. Так, на рис. 5.3 видно, что длина отрезка $[a, c_k]$ никогда не станет меньше длины отрезка $[a, c]$. Вместо (5.6) нужно использовать условие близости двух последовательных приближений

$$|c_k - c_{k-1}| < \varepsilon \quad (5.10)$$

или условием малости невязки (5.8).

4. Метод Ньютона (метод касательных). Его отличие от предыдущего метода состоит в том, что на k -й итерации вместо хорды проводится касательная к кривой $y = F(x)$ при $x = c_{k-1}$ и ищется точка пересечения касательной с осью абсцисс. При этом не обязательно задавать отрезок $[a, b]$, содержащий корень уравнения (5.1), а достаточно лишь найти некоторое начальное приближение корня $x = c_0$ (рис. 5.4).

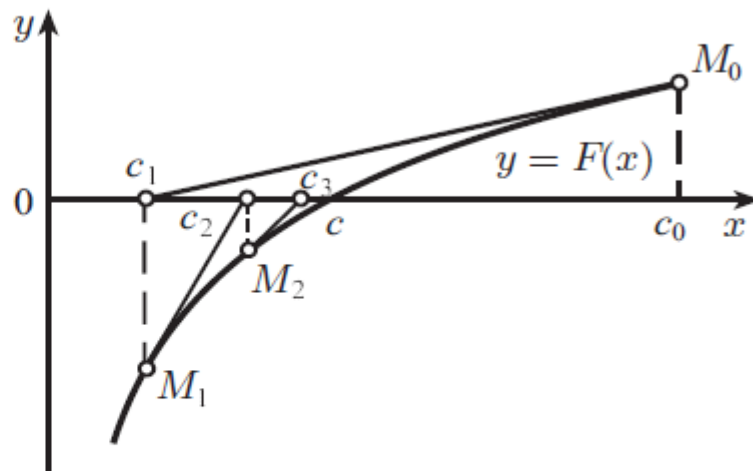


Рис. 5.4. Метод касательных

Уравнение касательной, проведенной к кривой $y = F(x)$ в точке M_0 с координатами c_0 и $F(c_0)$, имеет вид

$$y - F(c_0) = F'(c_0)(x - c_0).$$

Отсюда найдем следующее приближение корня c_1 как абсциссу точки пересечения касательной с осью x ($y = 0$):

$$c_1 = c_0 - F(c_0)/F'(c_0).$$

Аналогично могут быть найдены и следующие приближения как точки пересечения с осью абсцисс касательных, проведенных в точках M_1 , M_2 и т. д. Формула для k -го приближения имеет вид

$$c_k = c_{k-1} - F(c_{k-1})/F'(c_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.11)$$

При этом необходимо, чтобы $F'(c_{k-1})$ не равнялась нулю. Для окончания итерационного процесса могут быть использованы условия (5.10) или (5.8).

Из (5.11) следует, что на каждой итерации объем вычислений в методе Ньютона больший, чем в рассмотренных ранее методах, поскольку приходится находить значение не только функции $F(x)$, но и ее производной. Однако скорость сходимости здесь значительно выше, чем в других методах.

Теорема. Пусть $x = c$ — корень уравнения (5.1), т. е. $F(c) = 0$, а $F'(c) \neq 0$ и $F''(x)$ непрерывна. Тогда существует окрестность D корня c ($c \in D$) такая, что если начальное приближение c_0 принадлежит этой окрестности, то для метода Ньютона последовательность значений $\{c_k\}$ сходится к c при $k \rightarrow \infty$. При этом для погрешности корня $\varepsilon_k = c - c_k$ имеет место соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k-1}^2} \right| = \left| \frac{F''(c)}{2F'(c)} \right|.$$

Фактически это означает, что на каждой итерации погрешность возводится в квадрат, т. е. число верных знаков корня удваивается. Если

$$\left| \frac{F''(c)}{2F'(c)} \right| \sim 1,$$

то легко показать, что при $|\varepsilon_0| \leq 0.5$ пяти-шести итераций достаточно для получения минимально возможной погрешности при вычислениях с двойной точностью. Действительно, погрешность теоретически станет в этом случае величиной порядка 2^{-64} , что намного меньше, чем максимальная погрешность округления при вычислениях с двойной точностью, равная 2^{-53} (см. гл. 1, § 2). Заметим, что для получения столь малой погрешности в методе деления отрезка пополам потребовалось бы согласно (5.7) более 50 итераций.

Пример. Для иллюстрации рассмотрим уравнение $x^2 - 0.25 = 0$ и найдем методом Ньютона один из его корней, например $x = c = 0.5$. Для данного уравнения $F''(c)/2F'(c) = 1$. Выберем $c_0 = 1$, тогда $\varepsilon_0 = -0.5$. Проводя вычисления с двойной точностью, получим следующие значения погрешностей:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -1.25 \cdot 10^{-1}, & \varepsilon_3 &= -1.52 \cdot 10^{-4}, & \varepsilon_5 &= -5.55 \cdot 10^{-16}, \\ \varepsilon_2 &= -1.25 \cdot 10^{-2}, & \varepsilon_4 &= -2.32 \cdot 10^{-8}, & \varepsilon_6 &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, после шести итераций погрешность в рамках арифметики с двойной точностью исчезла.

Трудность в применении метода Ньютона состоит в выборе начального приближения, которое должно находиться в окрестности D . При неудачном выборе начального приближения итерации могут расходиться.

Пример. Для уравнения $\operatorname{arctg} x = 0$ (корень $x = c = 0$) при начальном приближении $c_0 = 1.5$ первые шесть итераций приводят к погрешностям

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 1.69, & \varepsilon_3 &= 5.11, & \varepsilon_5 &= 1.58 \cdot 10^3, \\ \varepsilon_2 &= -2.32, & \varepsilon_4 &= -32.3, & \varepsilon_6 &= -3.89 \cdot 10^6. \end{aligned}$$

Очевидно, что итерации здесь расходятся.

Для предотвращения расходимости иногда целесообразно использовать смешанный алгоритм. Он состоит в том, что сначала применяется всегда сходящийся метод (например, метод деления отрезка пополам), а после некоторого числа итераций — быстро сходящийся метод Ньютона.

5. Метод простой итерации. Для использования этого метода исходное нелинейное уравнение записывается в виде

$$x = f(x). \quad (5.12)$$

Пусть известно начальное приближение корня $x = c_0$. Подставляя это значение в правую часть уравнения (5.12), получаем новое приближение

$$c_1 = f(c_0).$$

Подставляя каждый раз новое значение корня в (5.12), получаем последовательность значений

$$c_k = f(c_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Итерационный процесс прекращается, если результаты двух последовательных итераций близки, т. е. если выполнено неравенство (5.10). Заметим, что в методе простой итерации для невязки, полученной на k -й итерации, выполнено соотношение

$$r_k = c_k - f(c_k) = c_k - c_{k+1}.$$

Таким образом, условие малости невязки на k -й итерации оказывается эквивалентным условию близости k -го и $k + 1$ -го приближений.

Достаточное условие сходимости метода простой итерации дается следующей теоремой.

Теорема. Пусть $x = c$ — корень уравнения (5.12), т. е. $c = f(c)$, а $|f'(c)| < 1$ и $f'(x)$ непрерывна. Тогда существует окрестность D корня c ($c \in D$) такая, что если начальное приближение c_0 принадлежит этой окрестности, то для метода простой итерации последовательность значений $\{c_k\}$ сходится к c при $k \rightarrow \infty$.

Метод простой итерации рассмотрен нами для уравнения (5.12). К такому виду можно привести и более общее уравнение (5.1), аналогично тому, как это делалось при решении систем линейных уравнений:

$$\begin{aligned} F(x) = 0, \quad \tau F(x) = 0, \\ x = x - \tau F(x). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Здесь $\tau \neq 0$ — некоторое число. Уравнение (5.13) эквивалентно (5.12) с функцией $f(x) = x - \tau F(x)$. За счет выбора значения параметра τ можно добиваться сходимости метода простой итерации и повышения скорости сходимости. Например, если на некотором отрезке, содержащем корень уравнения, производная $F'(x)$ ограничена константами m и M :

$$0 < m < F'(x) < M,$$

то для производной $f'(x)$ будет справедливо неравенство

$$1 - \tau M < f'(x) < 1 - \tau m.$$

Выбирая $\tau = 2/(M + m)$, получаем

$$-\frac{M - m}{M + m} < f'(x) < \frac{M - m}{M + m},$$

т. е. $|f'(x)| < 1$, что обеспечивает сходимость метода простой итерации.

Параметр τ в (5.13) можно выбирать и переменным, зависящим от номера итерации. Так, если положить $\tau_k = 1/F'(c_{k-1})$, то метод простой итерации для уравнения (5.13) примет вид

$$c_k = c_{k-1} - F(c_{k-1})/F'(c_{k-1}).$$

Это соотношение совпадает с формулой метода Ньютона (5.11). Следовательно, метод Ньютона можно трактовать как частный случай метода простой итерации с переменным τ .

На рис. 5.5 представлен алгоритм решения нелинейного уравнения (5.12) методом простой итерации.

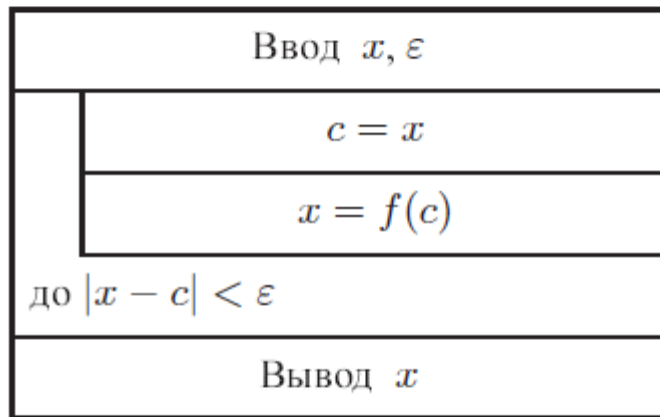


Рис. 5.5. Алгоритм метода простой итерации

Здесь x — начальное приближение корня, а в дальнейшем — значение корня после каждой итерации, c — результат предыдущей итерации. В данном алгоритме предполагалось, что итерационный процесс сходится. Если такой уверенности нет, то необходимо ограничить число итераций и ввести для них счетчик (см. рис. 4.6).

Вопрос 2

О решении алгебраических уравнений.

Рассмотренные выше методы решения нелинейных уравнений пригодны как для трансцендентных, так и для алгебраических уравнений. Вместе с тем при нахождении корней многочленов приходится сталкиваться с некоторыми особенностями. В частности, при рассмотрении точности вычислительного процесса (гл. 1, § 3) отмечалась чувствительность к погрешностям значений корней многочлена. С другой стороны, по сравнению с трансцендентными функциями многочлены имеют то преимущество, что заранее известно число их корней.

Напомним некоторые известные из курса алгебры свойства алгебраических уравнений с действительными коэффициентами вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0. \quad (5.14)$$

1. Уравнение степени n имеет всего n корней с учетом кратности, среди которых могут быть как действительные, так и комплексные.

2. Комплексные корни образуют комплексно–сопряженные пары, т. е. каждому корню $x = c + id$ соответствует корень $x = c - id$.

Одним из способов решения уравнения (5.14) является *метод понижения порядка*. Он состоит в том, что после нахождения какого-либо корня $x = c$ данное уравнение можно разделить на $x - c$, понизив его порядок до $n - 1$. Правда, при таком способе нужно помнить о точности, поскольку даже небольшая погрешность в значении первого корня может привести к накапливанию погрешности в дальнейших вычислениях.

Рассмотрим применение метода Ньютона к решению уравнения (5.14). В соответствии с формулой (5.11) итерационный процесс для нахождения корня нелинейного уравнения (5.14) имеет вид

$$x_k = x_{k-1} - \frac{F(x_{k-1})}{F'(x_{k-1})},$$

$$F(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad F'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}.$$

Естественно, при использовании метода Ньютона должны выполняться условия сходимости (см. § 1, п. 4). При их соблюдении в результате численного решения получается значение того корня, который находится вблизи заданного начального приближения x_0 .

Заметим, что для уменьшения погрешностей лучше сначала находить меньшие по модулю корни многочлена и сразу удалять их из уравнения, приводя его к меньшей степени. Поэтому, если отсутствует информация о величинах корней, в качестве начальных приближений принимают числа 0 , ± 1 и т. д.

При использовании компьютера имеется возможность работать с комплексными числами; поэтому изложенный метод Ньютона может быть использован (с необходимым обобщением) и для нахождения комплексных корней многочленов. При этом, если в качестве начального приближения x_0 взять комплексное число, то последующие приближения и окончательное значение корня могут оказаться комплексными.

Комплексные корни попарно сопряженные, и при их исключении порядок уравнения уменьшается на два, поскольку оно делится сразу на квадратный трехчлен, т. е.

$$F(x) = (x^2 + px + q)(b_n x^{n-2} + \dots + b_2) + b_1 x + b_0. \quad (5.15)$$

Линейный остаток $b_1 x + b_0$ равен нулю, если p, q выражаются с помощью найденных корней:

$$p = -2c, \quad q = c^2 + d^2, \quad x = c \pm id.$$

Представление (5.15) может быть также использовано для нахождения p, q , а значит, и для определения корней. Эта процедура лежит в основе *метода Луна*.

Суть метода Лина состоит в следующем. Предположим, что коэффициенты b_0, b_1 равны нулю. Тогда, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x многочлена $F(x)$ в выражениях (5.14) и (5.15), можно получить (для упрощения выкладок $b_n = a_n = 1$)

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_{n-1} - p, \\ b_{n-2} &= a_{n-2} - pb_{n-1} - q, \\ &\dots \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= a_2 - pb_3 - qb_4; \\ p &= (a_1 - qb_3)/b_2, \quad q = a_0/b_2. \end{aligned} \tag{5.17}$$

В соотношения (5.17) входят коэффициенты b_2 и b_3 , которые являются функциями p и q . Действительно, задав значения p и q , из соотношений (5.16) можно последовательно найти b_3 и b_2 . Поэтому соотношения (5.17) представляют собой систему двух нелинейных уравнений относительно p и q :

$$\begin{aligned} p &= f_1(p, q), \\ q &= f_2(p, q). \end{aligned}$$

Такая система в методе Лина решается методом простой итерации:

задаются начальные приближения для p, q которые используются для вычисления коэффициентов $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_2$, затем из уравнений (5.17) уточняются значения p, q . Итерационный процесс вычисления этих величин продолжается до тех пор, пока их изменения в двух последовательных итерациях не станут малыми.

Широко распространен также другой метод, основанный на выделении квадратичного множителя $x^2 + px + q$, — метод Бэрстоу. Он использует метод Ньютона для решения системы двух уравнений.

Вопрос 3

**Решение систем нелинейных
уравнений**

В отличие от систем линейных уравнений не существует прямых методов решения нелинейных систем общего вида. Лишь в отдельных случаях систему (5.18) можно решить непосредственно. Например, для случая двух уравнений иногда удается выразить одно неизвестное через другое и таким образом свести задачу к решению одного нелинейного уравнения относительно одного неизвестного.

Для решения систем нелинейных уравнений обычно используются итерационные методы. Ниже будут рассмотрены некоторые из них: метод простой итерации, метод Зейделя и метод Ньютона.

Систему (5.19) можно решать и *методом Зейделя*, напоминающим метод Гаусса–Зейделя решения систем линейных уравнений (см. гл. 4, § 3). Значение $x_i^{(k)}$ находится из i -го уравнения системы (5.19) с использованием уже вычисленных на текущей итерации значений неизвестных. Таким образом, значения неизвестных на k -й итерации будут находиться не с помощью (5.20), а с помощью соотношения (ср. с (4.31))

$$x_i^{(k)} = f_i(x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Итерационный процесс в обоих методах продолжается до тех пор, пока изменения всех неизвестных в двух последовательных итерациях не станут малыми, т. е. в качестве критерия завершения итераций выбирается одно из условий (4.21) – (4.23).

При использовании метода простой итерации и метода Зейделя успех во многом определяется удачным выбором начальных приближений неизвестных: они должны быть достаточно близкими к истинному решению. В противном случае итерационный процесс может не сойтись.

Метод Ньютона. Этот метод обладает гораздо более быстрой сходимостью, чем метод простой итерации и метод Зейделя. В случае одного уравнения $F(x) = 0$ алгоритм метода Ньютона был легко получен путем записи уравнения касательной к кривой $y = F(x)$. По сути для нахождения нового приближения функция $F(x)$ заменялась линейной функцией, т. е. раскладывалась в ряд Тейлора, при этом член, содержащий вторую производную, отбрасывался (как и все последующие члены). Та же идея лежит в основе метода Ньютона для системы уравнений: функции $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ раскладываются в ряд Тейлора, причем в разложении отбрасываются члены, содержащие вторые (и более высоких порядков) производные.

Пусть приближенные значения неизвестных системы (5.18), полученные на предыдущей итерации, равны соответственно $x_1^{(k-1)}$, $x_2^{(k-1)}$, \dots , $x_n^{(k-1)}$. Задача состоит в нахождении приращений (поправок) к этим значениям Δx_1 , Δx_2 , \dots , Δx_n , благодаря которым следующее приближение к решению системы (5.18) запишется в виде

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= x_1^{(k-1)} + \Delta x_1, \\ x_2^{(k)} &= x_2^{(k-1)} + \Delta x_2, \\ &\dots \\ x_n^{(k)} &= x_n^{(k-1)} + \Delta x_n. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Проведем разложение левых частей уравнений (5.18) с учетом (3) в ряд Тейлора, ограничиваясь лишь линейными членами относительно приращений:

$$\begin{aligned} F_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) &\approx F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \Delta x_n, \\ F_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) &\approx F_2 + \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \Delta x_n, \\ &\dots \\ F_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) &\approx F_n + \frac{\partial F_n}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \Delta x_n. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Определителем системы (5.23) является *якобиан*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Для существования единственного решения системы (5.23) он должен быть отличным от нуля на каждой итерации.

Таким образом, итерационный процесс решения системы уравнений (5.18) методом Ньютона состоит в определении приращений $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ к значениям неизвестных на каждой итерации посредством решения системы (5.23). Счет прекращается при выполнении одного из условий (4.21) – (4.23) или (4.24)¹⁾. Например, условие (4.22), которое с учетом (5.21) сведется к виду $\max_{1 \leq i \leq n} |\Delta x_i| < \varepsilon$. В методе Ньютона также важен удачный выбор начального приближения для обеспечения хорошей сходимости. Сходимость ухудшается с увеличением числа уравнений системы.

В качестве примера рассмотрим использование метода Ньютона для решения системы двух уравнений

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= 0, \\ F_2(x, y) &= 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Пусть приближенные значения неизвестных равны a, b .

Предположим, что якобиан системы (5.24) при $x = a, y = b$ отличен от нуля, т. е.

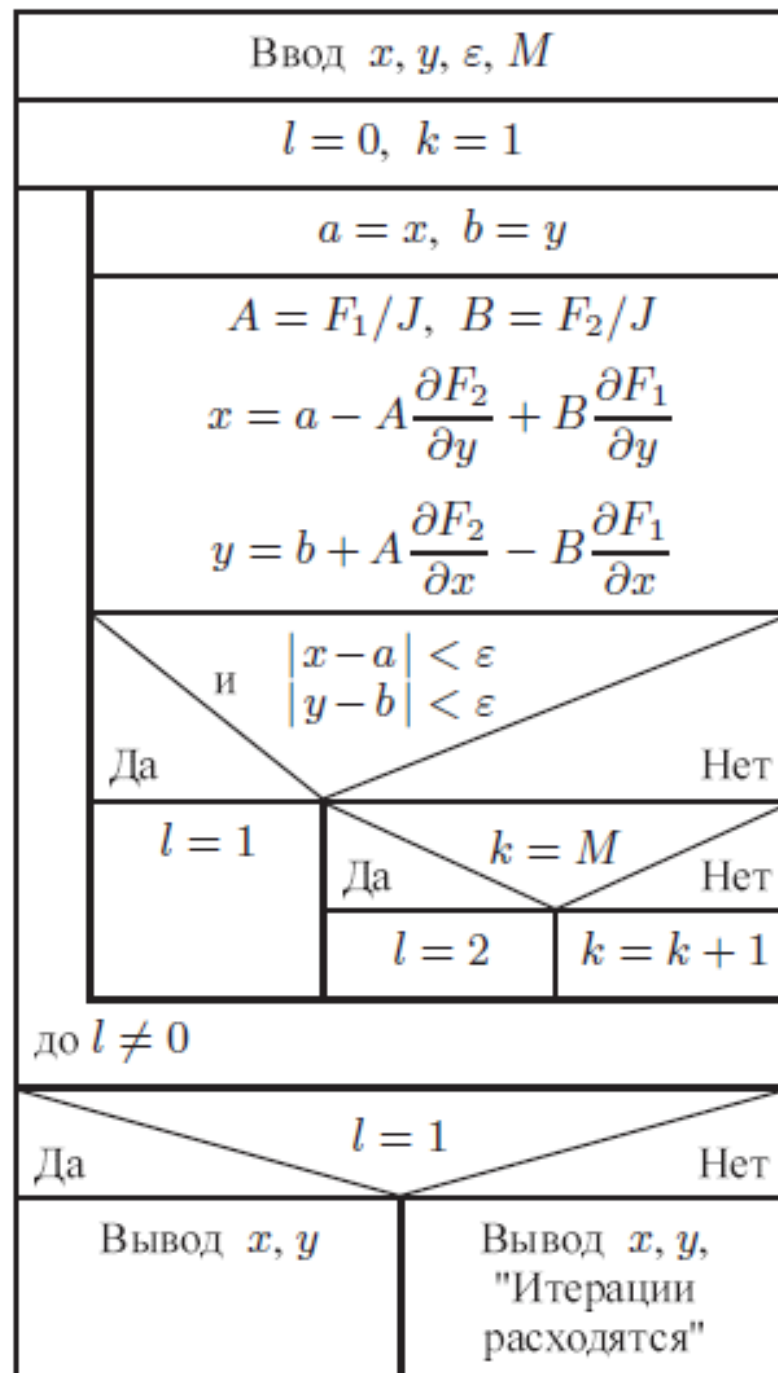
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда следующие приближения неизвестных можно записать в виде

$$\begin{aligned} x &= a - \frac{1}{J} \left(F_1 \frac{\partial F_2}{\partial y} - F_2 \frac{\partial F_1}{\partial y} \right), \\ y &= b + \frac{1}{J} \left(F_1 \frac{\partial F_2}{\partial x} - F_2 \frac{\partial F_1}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Величины, стоящие в правых частях, вычисляются при $x = a, y = b$.

Метод Ньютона для системы
двух уравнений



Конец лекции